

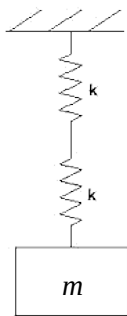
รหัสนักศึกษา.....

ข้อสอบวิชา SCPY 351 Vibrations Waves and Optics

วันที่ 10 ตุลาคม พ.ศ. 2559 เวลา 9.00 – 12.00 น.

ข้อสอบมีทั้งหมด 7 ข้อ คะแนนเต็ม 80 คะแนน

1. กำหนดความหนาแน่นของของเหลวชนิดหนึ่งเพิ่มตามความลึกอย่างเชิงเส้น ถ้าความหนาแน่นที่ผิวเป็น ρ_0 และที่ระดับความลึกเป็น D มีความหนาแน่นเป็น $2\rho_0$
จงตอบคำถามต่อไปนี้
 - 1.1 (3 คะแนน) จงเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความหนาแน่นของของเหลวกับความลึกตามเงื่อนไขที่โจทย์ให้มา
 - 1.2 (3 คะแนน) เมื่อปล่อยลูกทรงกลมความหนาแน่น $2\rho_0$ ที่ระดับความลึก $D/2$ หากไม่พิจารณาแรงเสียดทาน จงเขียนสมการการเคลื่อนที่ของลูกทรงกลม
 - 1.3 (4 คะแนน) จงหา general solution ของลูกทรงกลม คาบ แอมพลิจูด และอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของลูกทรงกลมว่าเป็นแบบใด
2. กำหนดแอมพลิจูดของการสั่นในแนวตั้งสำหรับระบบสปริงดังรูปมีค่าลดลงเหลือ 20% ของค่าเริ่มต้นเมื่อการสั่นผ่านไป 5 รอบ ถ้าให้ $k = 80 \text{ Nm}^{-1}$ และมวล $m = 2.5 \text{ kg}$ จงตอบคำถามต่อไปนี้



- 2.1 (2 คะแนน) โดยทั่วไป solution สำหรับ damped simple harmonic motion เขียนได้เป็น

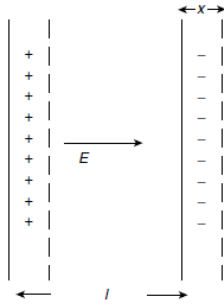
$$x = e^{-rt/2m} (C_1 e^{i\omega't} + C_2 e^{-i\omega't})$$

จงแสดงให้เห็นว่า solution ดังกล่าว เขียนได้เป็น $x = Ae^{-rt/2m} \sin(\omega't + \phi)$
เมื่อ A และ ϕ เป็นค่าคงตัว

- 2.2 (4 คะแนน) จงหา logarithmic decrement สำหรับ damped simple harmonic motion นี้

- 2.3 (4 คะแนน) จงหาค่า damping coefficient r สำหรับ damped simple harmonic motion นี้

3. พลาสมาคือ ionized gas ที่มีจำนวนอนุภาคต่อปริมาตรของไอออนและอิเล็กตรอนเท่า ๆ กัน ($n_i = n_e = n$) มีประจุตรงข้ามกัน (ทำให้ ionized gas เป็นกลางทางไฟฟ้า) และมวลเป็น m_i และ m_e ตามลำดับ โดยที่ $m_i > m_e$
แผนภาพข้างล่างนี้แสดงการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนทั้งหมดใน plasma slab (ความหนา l) เป็นระยะกระจัด x จากตำแหน่งสมดุล ในที่นี้พิจารณาได้ว่าไอออนไม่มีการเคลื่อนที่ การเคลื่อนที่ที่สัมพันธ์กันระหว่างไอออนและอิเล็กตรอนทำให้เกิด restoring electric field ซึ่งจะส่งผลให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่กลับมายังตำแหน่งสมดุล
ถ้า restoring electric field ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่เขียนได้เป็น $E = nex/\epsilon_0$ โดยที่ ϵ_0 เป็นค่าคงที่

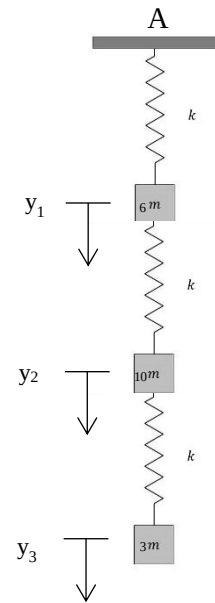


จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 3.1 (2 คะแนน) จงเขียนประจุของอิเล็กตรอนทั้งหมดใน plasma slab ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่
- 3.2 (2 คะแนน) จงหา restoring force ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่
- 3.3 (2 คะแนน) จงแสดงให้เห็นว่าความถี่เชิงมุมในการสั่นซึ่งเรียกว่า angular plasma frequency ω_e ของอิเล็กตรอนเขียนได้เป็น $\omega_e = (ne^2/m_e \epsilon_0)^{1/2}$

4. สปริงเบาสามเส้นเหมือนกันทุกประการมีมวลขนาด $6m$ $10m$ และ $3m$ ผูกติดอยู่ตามลำดับตามรูป เมื่อทำให้เกิดการสั่น มวลทั้งสามเคลื่อนที่ขึ้นลงในแนวตั้งที่ผ่านจุด A (โดยปลายจุด A ตรึงแน่น) กำหนดให้ k คือค่าคงตัวของสปริงทั้งสาม จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 4.1 (3 คะแนน) จงเขียนสมการการเคลื่อนที่ของมวลทั้งสาม
- 4.2 (2 คะแนน) จงเขียนความถี่ของ free oscillation ω_0
- 4.3 (9 คะแนน) จงหาความถี่ของ normal mode vibration ทั้งหมดที่เกิดขึ้นโดยให้ตอบในเทอมของ ω_0



5. (10 คะแนน) จากหัวข้อเรื่อง Linear array of two kinds of atoms in an ionic crystal ซึ่งกล่าวถึงระบบที่ประกอบด้วยอนุภาค 2 ชนิดที่มีมวลต่างกันคือ M และ m (กำหนดให้ $M < m$) สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคทั้งสองเขียนได้เป็น

$$M\ddot{y}_{2r+1} = \frac{T}{a}(y_{2r+2} + y_{2r} - 2y_{2r+1}) \text{ และ } m\ddot{y}_{2r} = \frac{T}{a}(y_{2r+1} + y_{2r-1} - 2y_{2r}) \quad \text{ตามลำดับ}$$

โดยเขียน solution สำหรับสมการเคลื่อนที่ของแต่ละอนุภาคได้เป็น $y_{2r+1} = A_M e^{i(\omega t - (2r+1)ka)}$ และ

$$y_{2r} = A_m e^{i(\omega t - 2rka)} \quad \text{ตามลำดับ}$$

จงแสดงให้เห็นว่าที่ความยาวคลื่นยาวๆ ($k \rightarrow 0$) ใน optical mode อนุภาคทั้งสองมีทิศทางการเคลื่อนที่สวนทางกัน (out of phase) และภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน ใน acoustic mode อนุภาคทั้งสองมีทิศทางการเคลื่อนที่ไปในทิศทางเดียวกัน (in phase)

ข้อมูลนี้อาจเป็นประโยชน์สำหรับข้อ 5

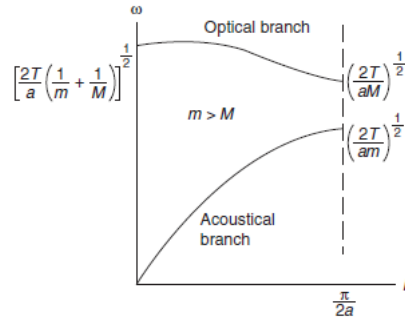


Figure 5.17 Dispersion relations for the two modes of transverse oscillation in a crystal structure

6. (10 คะแนน) เชือกเส้นหนึ่งมี characteristic impedance เป็น ρc ถ้า ณ ตำแหน่งหนึ่งบนเส้นเชือกมีปมที่มีมวลขนาด M อยู่ เมื่อคลื่นตามขวางบนเส้นเชือกที่มีความถี่เชิงมุม ω เคลื่อนที่ในทิศ $+x$ เคลื่อนที่ผ่านปมเชือกดังกล่าว ปรากฏว่า เกิดคลื่นสะท้อน (reflected wave) และคลื่นส่งผ่าน (transmitted wave) ขึ้น
- กำหนดให้ boundary conditions ณ ตำแหน่งปมเชือกดังกล่าวประกอบด้วย

- (1) การกระจัดของเชือกทางด้านซ้ายและขวาของปมเชือกเท่ากัน กล่าวคือ $y_i + y_r = y_t$ และ
- (2) ความแตกต่างระหว่าง transverse forces ทางด้านซ้ายและทางด้านขวาที่ติดกับปมเชือกมีค่าเท่ากับ ผลคูณระหว่าง มวลกับความเร่งของปมเชือก

ถ้า A_1, B_1 และ A_2 เป็นแอมพลิจูดของคลื่นตกกระทบ คลื่นสะท้อนและคลื่นส่งผ่าน ตามลำดับ จงแสดงให้เห็นว่า

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{-iq}{1+iq} \quad \text{และ} \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1+iq}$$

เมื่อ $q = \omega M / 2\rho c$ และ $i^2 = -1$

(แนะ กำหนดให้ตำแหน่งของปมเชือกคือ $x = 0$ และ ใช้ wave functions ของคลื่นที่เกี่ยวข้องในรูป exponential function เพื่อความสะดวกในการคำนวณ)

7. กำหนด phase velocity ของ gravity wave ในของเหลวที่ความลึก h เขียนได้เป็น

$$v^2 = \frac{g}{k} \tanh kh$$

เมื่อ g คือ gravitational acceleration

k คือ wave number เขียนได้เป็น $2\pi/\lambda$

และ λ คือ ความยาวคลื่น

จงตอบคำถามต่อไปนี้

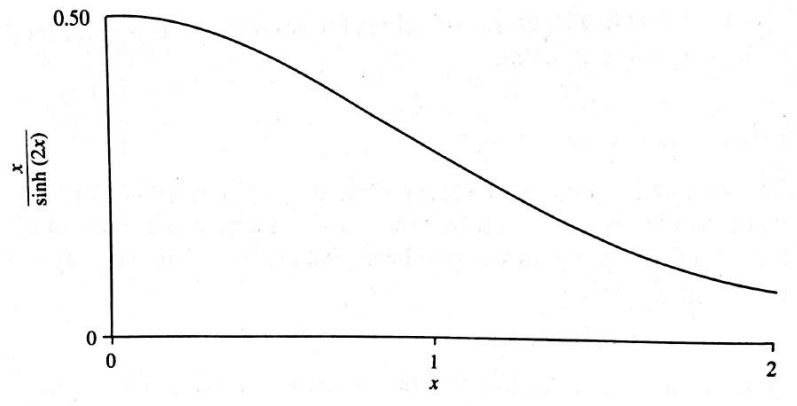
7.1 (2 คะแนน) จงเขียนสมการ dispersion relation $\omega(k)$ ของ gravity wave

7.2 (3 คะแนน) จงวาดกราฟคร่าว ๆ ของ dispersion relation ของ gravity wave ที่ได้ในข้อ 7.1

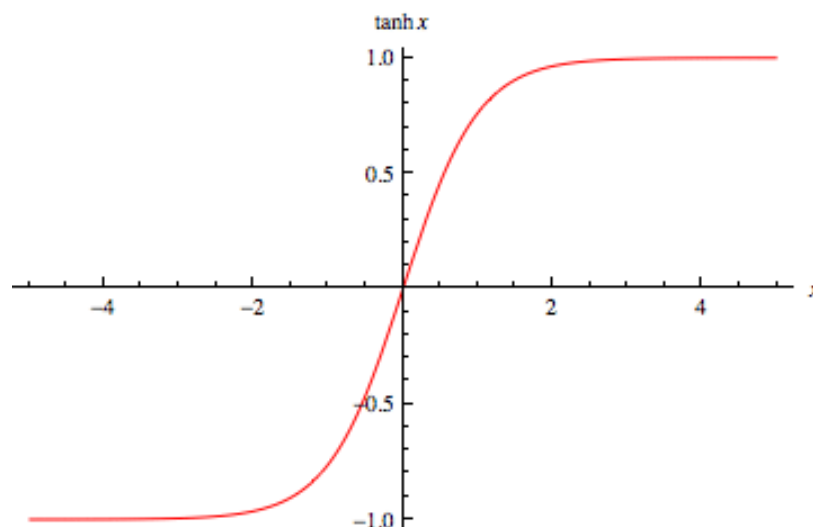
7.3 (3 คะแนน) จงหา v_g/v เมื่อ v_g คือ group velocity ของ gravity wave

กำหนดให้
$$\frac{d}{dx} \tanh x = \text{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

7.4 (2 คะแนน) โดยอาศัยกราฟ $x/\sinh(2x)$ ที่ให้มา จงหาค่าขอบเขตของ group velocity v_g ที่ได้ในข้อ 7.3 ในเทอมของ phase velocity v



7.5 (10 คะแนน) โดยอาศัยกราฟ $\tanh x$ ที่ให้มา จงหาขนาดของ phase velocity v และ group velocity v_g สำหรับ gravity wave ที่มีความถี่ 1 Hz ณ ความลึก 0.1 m (กำหนด $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$)



<http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicTangent.html>